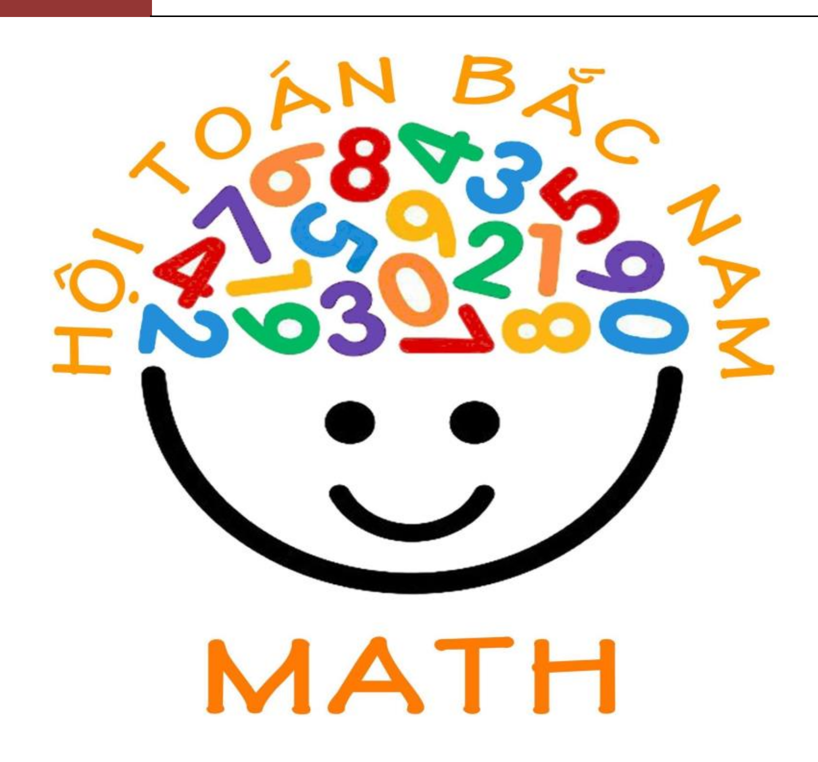


MỖI THÁNG MỘT CHỦ ĐỀ

PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH THÀNH NHÂN TỬ TRONG VIỆC GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Tháng 07, năm 2017

A. MỞ ĐẦU

Phương trình lượng giác là vấn đề quan trọng và quen thuộc trong chương trình toán học bậc THPT cũng như trong các đề thi tuyển sinh đại học. Việc giải thành thạo phương trình lượng giác đã trở thành nhiệm vụ và cũng là mong muốn của mọi học sinh. Tuy nhiên, sự phong phú của công thức lượng giác đã gây khó khăn cho học sinh trong việc định hướng lời giải. Nếu định hướng không tốt sẽ dẫn đến biến đổi vòng vo, không giải được hoặc lời giải sẽ dài dòng, không đẹp. Cản trở này phần nào làm nản chí các em học sinh. Một số em đã sợ học và xác định bỏ phần phương trình lượng giác. Với mong muốn giúp học sinh khắc phục khó khăn này, tôi viết bài viết này. Bài viết đưa ra một số định hướng biến đổi phương trình dựa trên những dấu hiệu đặc biệt. Nhờ đó học sinh nhanh chóng tìm ra lời giải của bài toán, tiết kiệm thời gian, tự tin hơn trước các phương trình lượng giác.

Bài viết được chia thành ba phần:

Phần A: Trình bày sự cần thiết và nội dung bài viết.

Phần B: Nội dung bài viết, phần này chia thành các mục nhỏ dưới đây

I. Nhận dạng nhân tử chung dựa vào đẳng thức cơ bản

II. Phương trình bậc 2 đối với $\sin x$, $\cos x$.

III. Nhẩm nghiệm đặc biệt để xác định nhân tử chung

IV. Sử dụng công thức đặc biệt

V. Thay thế hằng số bằng đẳng thức lượng giác

Phần C: Trình bày một số bài tập tương tự.

Tuy đã rất cố gắng, mong muốn bài viết có chất lượng tốt nhất nhưng do hạn chế về thời gian và hiểu biết nên không tránh khỏi những thiếu sót, tôi rất mong nhận được sự góp ý chân thành của các bạn đồng nghiệp và cấp trên để bài viết được hoàn thiện hơn.

Mọi ý kiến đóng góp của độc giả xa gần vui lòng gửi về địa chỉ mail: thongqna@gmail.com.

Quảng Nam, ngày 15 tháng 07 năm2017

TRẦN THÔNG

B. PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH THÀNH NHÂN TỬ TRONG VIỆC GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

I. Nhận dạng nhân tử chung dựa vào đẳng thức cơ bản

Khi trong phương trình lượng giác xuất hiện những biểu thức có dấu hiệu cùng nhân tử chung nếu nhận dạng được ta sẽ biến đổi đúng hướng và dễ dàng giải được. Việc phát hiện nhân tử chung đòi hỏi phải nắm được những đẳng thức cơ bản. Sau đây là một số đẳng thức quen thuộc:

❖ Nhân tử $\sin x + \cos x$:

- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)$
- $1 + \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2$
- $1 + \tan x = \dfrac{\cos x + \sin x}{\cos x}$
- $1 + \cot x = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x}$
- $\sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin x + \cos x$

❖ Nhân tử $\sin x - \cos x$:

- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)$
- $1 - \sin 2x = (\sin x - \cos x)^2$
- $1 - \tan x = \dfrac{\cos x - \sin x}{\cos x}$
- $1 - \cot x = \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x}$
- $\sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin x - \cos x$

❖ Nhân tử $1 \pm \sin x$: $\cos^2 x = (1+\sin x)(1-\sin x)$

❖ Nhân tử $1 \pm \cos x$: $\sin^2 x = (1+\cos x)(1-\cos x)$

❖ Nhân tử $1 \pm 2\sin x$:

- $4\cos^2 x - 3 = 1 - 4\sin^2 x = (1-2\sin x)(1+2\sin x)$
- $\cos 3x = \cos x(4\cos^2 x - 3) = \cos x(1-2\sin x)(1+2\sin x)$

❖ Nhân tử $1 \pm 2\cos x$:

- $4\sin^2 x - 3 = 1 - 4\cos^2 x = (1-2\cos x)(1+2\cos x)$
- $\sin 3x = \sin x(3 - 4\sin^2 x) = \sin x(2\cos x - 1)(2\cos x + 1)$

❖ Một số đẳng thức khác:

- $\cot x - \tan x = 2\cot 2x$
- $\tan x + \cot x = \dfrac{2}{\sin 2x}$
- $\cos 3x + \sin 3x = (\cos x - \sin x)(1 + 2\sin 2x)$
- $\cos 3x - \sin 3x = (\cos x + \sin x)(1 - 2\sin 2x)$

Để thấy rõ hơn tầm quan trọng và lợi ích của các đẳng thức cơ bản trên ta xem một vài ví dụ.

Ví dụ 1.1(ĐH 2007 – KA). Giải phương trình:

$$(1+\sin^2 x)\cos x + (1+\cos^2 x)\sin x = 1 + \sin 2x \qquad \textbf{(1.1)}$$

Phân tích: Khai triển vế trái phương trình thấy đối xứng với $\sin x, \cos x$ nên xuất hiện nhân tử $\sin x + \cos x$. Vế phải là $1 + \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2$ chứa nhân tử $\sin x + \cos x$. Vì vậy ta có lời giải.

Giải:

$$\text{Pt}(1.1) \Leftrightarrow \sin x + \cos x + \sin x\cos x(\sin x + \cos x) = (\sin x + \cos x)^2$$
$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1 + \sin x\cos x - \sin x - \cos x) = 0$$
$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1 - \sin x)(1 - \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x + \cos x = 0 \\ \sin x = 1 \\ \cos x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có 3 họ nghiệm.

Ví dụ 1.2(ĐH 2005 – KB). Giải phương trình:

$$1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0 \qquad \textbf{(1.2)}$$

Phân tích: Vì trong phương trình xuất hiện $\sin x + \cos x, 1 + \sin 2x, \cos 2x$ nên dễ dàng nhận thấy nhân tử là $\sin x + \cos x$.

Giải:

$$\text{pt}(1.2) \Leftrightarrow \sin x + \cos x + (\sin x + \cos x)^2 + \cos^2 x - \sin^2 x = 0$$
$$\Leftrightarrow \sin x + \cos x + (\sin x + \cos x)^2 + (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) = 0$$
$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1 + \sin x + \cos x + \cos x - \sin x) = 0$$
$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1 + 2\cos x) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x + \cos x = 0 \\ \cos x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có 3 họ nghiệm.

Ví dụ 1.3. Giải phương trình:

$$\sin 4x + 4\sin\left(\frac{5\pi}{2} + 2x\right) = 4(\sin x + \cos x) \qquad \textbf{(1.3)}$$

Phân tích: Pt(1.3) $\Leftrightarrow 2\sin 2x\cos 2x + 4\cos 2x - 4(\sin x + \cos x) = 0$. Vậy phương trình chứa nhân tử $\sin x + \cos x$.

Giải:

$$\text{Pt}(1.3) \Leftrightarrow 2\sin 2x\cos 2x + 4\cos 2x - 4(\sin x + \cos x) = 0$$
$$\Leftrightarrow 2\sin 2x(\cos^2 x - \sin^2 x) + 4(\cos^2 x - \sin^2 x) - 4(\sin x + \cos x) = 0$$
$$\Leftrightarrow 4\sin x\cos x(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) + 4(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) - 4(\sin x + \cos x) = 0$$
$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)\big(\sin x\cos x(\cos x - \sin x) + \cos x - \sin x - 1\big) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sin x + \cos x = 0 & (1.3.1) \\ \sin x\cos x(\cos x - \sin x) + \cos x - \sin x - 1 = 0 & (1.3.2) \end{array}\right.$$

Giải (1.3.1): $\sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Giải (1.3.2): Đặt $t = \cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right), -\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$. Phương trình (1.3.2) trở thành:

$$\frac{1-t^2}{2}t + t - 1 = 0 \Leftrightarrow t^3 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

Với $t = 1 \Rightarrow \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy phương trình có 3 họ nghiệm.

Ví dụ 1.4(ĐH 2003 – KA). Giải phương trình:

$$\cot x - 1 = \frac{\cos 2x}{1 + \tan x} + \sin^2 x - \frac{1}{2}\sin 2x \quad \mathbf{(1.4)}$$

Phân tích: Phương trình có chứa $\cot x - 1, \cos 2x$ nên ta nghĩ đến nhân tử chung $\sin x - \cos x$.

Giải:

ĐKXĐ: $x \neq k.\frac{\pi}{2}, x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi$.

$$\text{Pt}(1.4) \Leftrightarrow \frac{\cos x - \sin x}{\sin x} = \frac{\cos x(\cos^2 x - \sin^2 x)}{\sin x + \cos x} + \sin^2 x - \sin x \cos x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x - \sin x}{\sin x} = \frac{\cos x(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\sin x + \cos x} + \sin x(\sin x - \cos x)$$

$$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(1 - \sin x \cos x + \sin^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x - \sin x = 0 \\ 1 - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1 - \cos 2x}{2} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\ (tm) \\ \sin 2x + \cos 2x = 3\ (vn) \end{array}\right..$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

Ví dụ 1.5(ĐH 2008 – KD). Giải phương trình:

$$2\sin x(1 + \cos 2x) + \sin 2x = 1 + 2\cos x \qquad \textbf{(1.5)}$$

Phân tích: Phương trình xuất hiện $1 - \sin 2x, \cos 2x, \cos x - \sin x$ nên dễ thấy phương trình có nhân tử $\cos x - \sin x$.

Giải:

$$\text{Pt}(1.5) \Leftrightarrow 2\sin x - 2\cos x + 2\sin x(\cos^2 x - \sin^2 x) + 2\sin x \cos x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(\sin x - \cos x) + 2\sin x(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) - (\sin x - \cos x)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)(2 - 2\sin x \cos x - 2\sin^2 x - \sin x + \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)(-2\sin x \cos x + 2\cos^2 x - \sin x + \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)^2(2\cos x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x - \cos x = 0 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x \neq \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có 3 họ nghiệm.

Ví dụ 1.6. Giải phương trình: $\cos^2 x + \cos x + \sin^3 x = 0$ **(1.6)**

Phân tích: Phương trình chứa $\sin^3 x$, tức là chứa $\sin^2 x = (1-\cos x)(1+\cos x)$. Như vậy nhân tử của phương trình là $\cos x + 1$.

Giải:

$$\begin{aligned} \text{Pt}(1.6) &\Leftrightarrow \cos x(\cos x+1)+\sin x(1-\cos^2 x)=0 \\ &\Leftrightarrow \cos x(\cos x+1)+\sin x(1-\cos x)(1+\cos x)=0 \\ &\Leftrightarrow (\cos x+1)(\cos x+\sin x-\sin x\cos x)=0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \cos x=-1 & (1.6.1) \\ \cos x+\sin x-\sin x\cos x=0 & (1.6.2) \end{array}\right. \end{aligned}$$

Giải (1.6.1): $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Giải (1.6.2): Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right), -\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$. Phương trình (1.6.2) trở thành:

$$t^2 - 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t = 1+\sqrt{2} & (\,l\,) \\ t = 1-\sqrt{2} & (tm) \end{array}\right..$$

Với $t = 1-\sqrt{2} \Rightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1-\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right) + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy phương trình có 3 họ nghiệm.

Ví dụ 1.7. Giải phương trình: $\frac{\cos^2 x(\cos x - 1)}{\sin x + \cos x} = 2(1+\sin x)$ **(1.7)**

Phân tích: Nhìn vào phương trình và dựa vào các đẳng thức cơ bản dễ dàng suy ra $1+\sin x$ nhân tử chung.

Giải:

ĐKXĐ: $x \ne -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Pt}(1.7) \Leftrightarrow (1-\sin x)(1+\sin x)(\cos x-1) = 2(1+\sin x)(\sin x+\cos x)$$
$$\Leftrightarrow (1+\sin x)(\cos x - \sin x\cos x + \sin x - 1 - 2\sin x - 2\cos x) = 0$$
$$\Leftrightarrow (1+\sin x)(\cos x + \sin x\cos x + \sin x + 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow (1+\sin x)^2(\cos x+1) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = -1\\ \cos x = -1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi\\ x = \pi + k2\pi\end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có 2 họ nghiệm.

Ví dụ 1.8. Giải phương trình: $4\cos^2 x + (2\sin x - 1)(2\sin 2x + 1) = 3$ **(1.8)**

Phân tích: Trong phương trình có $4\cos^2 x - 3$ tức là chứa nhân tử $2\sin x - 1$.

Giải:

$$\text{Pt}(1.8) \Leftrightarrow 1 - 4\sin^2 x + (2\sin x - 1)(2\sin 2x + 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow (1-2\sin x)(1+2\sin x) + (2\sin x - 1)(2\sin 2x + 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow (1-2\sin x)(\sin x - 2\sin x\cos x) = 0$$
$$\Leftrightarrow \sin x(1-2\sin x)(1-2\cos x) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \sin x = \dfrac{1}{2}\\ \cos x = \dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k\pi\\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi\\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi\\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi\end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có 5 họ nghiệm.

II. Phương trình bậc 2 đối với $\sin x$, $\cos x$.

❖ **Phương trình chứa $\sin x.\cos x$:** Đối với phương trình dạng này ta nhóm số hạng chứa $\sin x.\cos x$ với số hạng chứa $\sin x$ và phần còn lại của phương trình đưa về tam thức bậc 2 đối với $\cos x$ hoặc nhóm số hạng chứa $\sin x.\cos x$ với số hạng chứa $\cos x$ và phần còn lại của phương trình đưa về tam thức bậc 2 đối với $\sin x$ để tìm nhân tử chung.

Ví dụ 2.1. Giải phương trình: $1+\sin x+\cos x+\sin 2x+\cos 2x=0$ **(2.1)**

Phân tích: Nếu nhóm $\sin 2x$ với $\cos x$ sẽ xuất hiện nhân tử $2\sin x+1$. Ta kiểm tra xem phần còn lại có nhân tử trên không? Đưa phần còn lại của phương trình về tam thức bậc hai đối với $\sin x: 2+\sin x-2\sin^2 x$. Phần này không chứa nhân tử $2\sin x+1$. Vậy ta nhóm $\sin 2x$ với $\sin x$ sẽ có nhân tử $2\cos x+1$. Phần còn lại biến đổi thành $2\cos^2 x+\cos x$ có nhân tử $2\cos x+1$.

Giải:

$$\text{Pt}(2.1) \Leftrightarrow \sin x+2\sin x\cos x+2\cos^2 x+\cos x=0$$
$$\Leftrightarrow \sin x(1+2\cos x)+\cos x(2\cos x+1)=0$$
$$\Leftrightarrow (\sin x+\cos x)(2\cos x+1)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x+\cos x=0\\ \cos x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có 3 họ nghiệm.

Ví dụ 2.2. Giải phương trình: $\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)=3\sin x+\cos x+2$ **(2.2)**

Giải: Ta có:

$$\text{Pt}(2.2) \Leftrightarrow \sin 2x+\cos 2x=3\sin x+\cos x+2$$
$$\Leftrightarrow 2\sin x\cos x-3\sin x+2\cos^2 x-\cos x-3=0$$
$$\Leftrightarrow \sin x(2\cos x-3)+(2\cos x-3)(\cos x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (2\cos x - 3)(\sin x + \cos x + 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow \sin x + \cos x = -1$$
$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Ví dụ 2.3. Giải phương trình: $\dfrac{\sin 2x - \cos 2x + 7\sin x + 3\cos x + 3}{2\sin x - 1} = 1$ **(2.3)**

Giải:

ĐKXĐ: $\begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x \neq \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

Khi đó:

$$\text{Pt}(2.3) \Leftrightarrow 2\sin x\cos x + 3\cos x + 2\sin^2 x + 5\sin x + 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow \cos x(2\sin x + 3) + (2\sin x + 3)(\sin x + 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x + 1)(2\sin x + 3) = 0 \Leftrightarrow \sin x + \cos x = -1$$
$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có 2 họ nghiệm.

Ví dụ 2.4. Giải phương trình: $4\sin x + 2\cos x = 2 + 3\tan x$ **(2.4)**

Giải:

ĐKXĐ: $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Khi đó:

$$\text{Pt}(2.4) \Leftrightarrow 4\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 2\cos x + 3\sin x$$
$$\Leftrightarrow 4\sin x\cos x - 2\cos x + 2 - 3\sin x - 2\sin^2 x = 0$$
$$\Leftrightarrow 2\cos x(2\sin x - 1) - (2\sin x - 1)(\sin x + 2) = 0$$
$$\Leftrightarrow (2\sin x - 1)(2\cos x - \sin x - 2) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sin x = \frac{1}{2} & (2.4.1) \\ 2\cos x - \sin x = 2 & (2.4.2) \end{array}\right.$$

Giải (2.4.1): $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Giải (2.4.2): $2\cos x - \sin x = 2 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{5}}\cos x - \frac{1}{\sqrt{5}}\sin x = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Gọi α là góc thỏa mãn $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Phương trình (2.4.2) trở thành

$$\cos(x + \alpha) = \cos\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = -2\alpha + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có 4 họ nghiệm.

Ví dụ 2.5. Giải phương trình $\frac{\sin 2x + \cos 2x + 3\sin x + \cos x}{\cos x + 1} = 2$ **(2.5)**

Giải:

ĐKXĐ: $\cos x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

PT đã cho tương đương với

$$2\sin x\cos x - \cos x - 2\sin^2 x + 3\sin x - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow \cos x(2\sin x - 1) - (2\sin x - 1)(\sin x - 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow (2\sin x - 1)(\cos x - \sin x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2\sin x - 1 = 0 & (2.5.1) \\ \cos x - \sin x + 1 = 0 & (2.5.2) \end{array}\right.$$

Giải (2.5.1): $2\sin x-1=0\Leftrightarrow \sin x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. \quad (tm)$

Giải (2.5.2):

$\cos x-\sin x+1=0\Leftrightarrow \sin x-\cos x=1\Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \ \ (tm) \\ x=\pi+k2\pi \quad (l) \end{array}\right.$.

Vậy phương trình có 3 họ nghiệm.

❖ ***Chú ý: Cách giải này cũng được áp dụng cho những phương trình có bậc 3.*** Nhóm số hạng chứa $\sin x.\cos x$ với số hạng chứa $\sin x$ và phần còn lại của phương trình đưa về đa thức bậc 3 đối với $\cos x$ hoặc nhóm số hạng chứa $\sin x.\cos x$ với số hạng chứa $\cos x$ và phần còn lại của phương trình đưa về đa thức bậc 3 đối với $\sin x$ để tìm nhân tử chung.

Ví dụ 2.6. Giải phương trình:

$$\cos 3x+\cos 2x+\sin 2x+\sin x-5\cos x=3 \qquad \textbf{(2.6)}$$

Giải:

Ta có

$\cos 3x+\cos 2x+\sin 2x+\sin x-5\cos x=3$

$\Leftrightarrow 4\cos^3 x-3\cos x+2\cos^2 x-1+2\sin x\cos x+2\sin x-5\cos x-3=0$

$\Leftrightarrow 4\cos^3 x+2\cos^2 x-8\cos x-4+\sin x(2\cos x+1)=0$

$\Leftrightarrow (2\cos^2 x-4)(2\cos x+1)+\sin x(2\cos x+1)=0$

$\Leftrightarrow (2\cos x+1)(2\sin^2 x-\sin x+2)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=-\frac{1}{2} \\ 2\sin^2 x-\sin x+2=0 \ (vn) \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}.$

Ví dụ 2.7. Giải phương trình:

$$\sin 3x - 3\sin 2x - 2\cos 2x + 3\sin x + 3\cos x - 2 = 0 \quad \textbf{(2.7)}$$

Giải:

$$\text{Pt(2.7)} \Leftrightarrow 3\sin x - 4\sin^3 x - 6\sin x\cos x + 2\sin^2 x - 1 + 3\sin x + 3\cos x - 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow 4\sin^3 x - 2\sin^2 x - 6\sin x + 3 + 3\cos x(2\sin x - 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow (2\sin x - 1)(2\sin^2 x - 3) + 3\cos x(2\sin x - 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow (2\sin x - 1)(2\sin^2 x + 3\cos x - 3) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sin x = \frac{1}{2} & (2.7.1) \\ 2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0 & (2.7.2) \end{array}\right.$$

Giải (2.7.1): $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Giải (2.7.2): $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 1 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy phương trình có 5 họ nghiệm.

❖ **Phương trình không chứa $\sin x.\cos x$:** Đối với loại phương trình này ta biến đổi về dạng $A^2 = B^2$.

Ví dụ 2.8. Giải phương trình: $\cos 2x + 4\cos x + 2\sin x + 3 = 0$ **(2.6)**

Giải:

Ta có:

$\cos 2x + 4\cos x + 2\sin x + 3 = 0$

$\Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x + 4\cos x + 2\sin x + 3 = 0$

$\Leftrightarrow \cos^2 x + 4\cos x + 4 = \sin^2 x - 2\sin x + 1$

$$\Leftrightarrow (\cos x + 2)^2 = (\sin x - 1)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x - \cos x = 3\ (vn) \\ \sin x + \cos x = -1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{array}\right. \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có 2 họ nghiệm.

Ví dụ 2.9. Giải phương trình: $\frac{5 + \cos 2x}{3 + 2\tan x} = 2\cos x$ **(2.7)**

Giải:

ĐKXĐ: $\cos x \neq 0,\ \tan x \neq -\frac{3}{2}$.

Khi đó:

$$\frac{5 + \cos 2x}{3 + 2\tan x} = 2\cos x \Leftrightarrow 5 + \cos^2 x - \sin^2 x = 6\cos x + 4\sin x$$

$\Leftrightarrow \cos^2 x - 6\cos x + 9 = \sin^2 x + 4\sin x + 4$

$$\Leftrightarrow (\cos x - 3)^2 = (\sin x + 2)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x - \sin x = 5\ (vn) \\ \sin x + \cos x = 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2 \end{array}\right. \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có 2 họ nghiệm.

III. Nhẩm nghiệm đặc biệt để xác định nhân tử chung

Trong một số phương trình, việc xác định nhân tử chung khá khó khăn. Khi đó ta có thể nhẩm một số nghiệm đặc biệt để xác định nhân tử chung. Từ đó định hướng được rõ ràng cách biến đổi phương trình.

Ta có thể thực hiên theo các bước sau:

Bước 1: Nhẩm nghiệm đặc biệt.

Bước 2: Kiểm tra các giá trị đặc biệt tương ứng với nghiệm tìm được ở bước 1. Từ đó xác định nhân tử chung.

Bước 3: Nhóm theo nhân tử đã xác định.

Ví dụ 3.1. Giải phương trình: $\cos 3x + \cos 2x + \sin 2x + \sin x - 5\cos x = 3$ **(3.1)**

Bước 1: Nhập vào máy tính cầm tay phương trình trên:

$\cos 3\text{alpha}\, x + \cos 2\text{alpha}\, x + \sin 2\text{alpha}\, x + \sin \text{alpha}\, x - 5\cos \text{alpha}\, x\ \text{alpha} = 3$.

Dùng lệnh shift solve, màn hình xuất hiện $X = ?$. Ta nhập một giá trị, ấn = và chờ kết quả. Hoặc dùng lệnh Calc để thử một số giá trị đặc biệt. Kết quả là $x = 120°$.

Bước 2: Các giá trị đặc biệt tương ứng là:

+ $x = -120°$ thì nhân tử sẽ là $2\cos x + 1$.

+ $x = 60°$ thì nhân tử sẽ là $2\sin x - \sqrt{3}$ hoặc $4\sin^2 x - 3$.

+ $x = -60°$ thì nhân tử sẽ là $\tan x + \sqrt{3}$ hoặc $\tan^2 x - 3$.

Phương trình có nghiệm nữa là $x = 120°$, tức có nhân tử $2\cos x + 1$. Nhóm làm xuất hiên nhân tử tìm được. Dễ thấy $\sin 2x + \sin x = \sin x(2\cos x + 1)$ nên phần còn lại của phương trình ta đưa về bậc 3 đối với $\cos x$, chác chắn có nhân tử $2\cos x + 1$.

Giải:

$$\text{Pt}(3.1) \Leftrightarrow 4\cos^3 x - 3\cos x + 2\cos^2 - 1 + 2\sin x\cos x + \sin x - 5\cos x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3 x + 2\cos^2 x - 8\cos x - 4 + \sin x(2\cos x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\cos x + 1)(2\cos^2 x - 4) + \sin x(2\cos x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\cos x + 1)(2\cos^2 x + \sin x - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = -\dfrac{1}{2} \\ 2\sin^2 x - \sin x + 2 = 0\ (vn) \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy phương trình có 2 họ nghiệm.

Ví dụ 3.2. Giải phương trình:

$$\sin 3x - 3\sin 2x - 2\cos 2x + 3\sin x + 3\cos x - 2 = 0 \quad \textbf{(3.2)}$$

Phân tích: Nhẩm nghiệm thấy phương trình có hai nghiệm đặc biệt là $30°, 150°$ nên có nhân tử là $2\sin x - 1$.

Giải:

$$\text{Pt}(3.2) \Leftrightarrow 3\sin x - 4\sin^3 x - 6\sin x\cos x + 2\sin^2 x - 1 + 3\sin x + 3\cos x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^3 x - 2\sin^2 x - 6\sin x + 3 + 3\cos x(2\sin x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\sin x - 1)(2\sin^2 x - 3) + 3\cos x(2\sin x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\sin x - 1)(2\sin^2 x + 3\cos x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sin x = \dfrac{1}{2} & (3.2.1) \\ 2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0 & (3.2.2) \end{array}\right.$$

Giải (3.2.1): $\sin x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Giải (3.2.2): $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 1 \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy phương trình có 5 họ nghiệm.

IV. Sử dụng công thức đặc biệt

Một số công thức thường dùng:

- $$\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$$
- $$\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=-2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$$
- $$\sqrt{3}\sin x+\cos x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$$
- $$\sqrt{3}\sin x-\cos x=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=-2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

Dấu hiệu nhân dạng phương trình giải theo phương pháp này là trong phương trình có chứa hằng số $\sqrt{3}$. Hai hướng chính biến đổi phương trình loại này là: + Đưa phương trình về dạng $\cos A=\cos B$ hoặc $\sin A=\sin B$.

+ Đưa về phương trình bậc 2 đối với một hàm số lượng giác.

❖ **Dạng 1:** Đưa phương trình về dạng $\cos A=\cos B$ hoặc $\sin A=\sin B$

Ví dụ 4.1. Giải phương trình:

$$4\sin^2\frac{x}{2}-\sqrt{3}\cos 2x=1+2\cos^2\left(x-\frac{3\pi}{4}\right) \qquad \textbf{(4.1)}$$

Giải: Ta có:

$$\text{Pt}(4.1)\Leftrightarrow 2(1-\cos x)-\sqrt{3}\cos 2x=1+1+\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos(x+\pi)=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\Leftrightarrow \cos(x+\pi)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-\frac{\pi}{6}=x+\pi+k2\pi \\ 2x-\frac{\pi}{6}=-x-\pi+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi \\ x=-\frac{5\pi}{18}+k\frac{2\pi}{3} \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có 2 họ nghiệm.

Ví dụ 4.2. Giải phương trình:

$$2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)+\sqrt{3}\cos 4x=4\cos^2 x-1 \qquad \textbf{(4.2)}$$

Giải:

Ta có:

$$\text{Pt}(4.2)\Leftrightarrow 1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-4x\right)+\sqrt{3}\cos 4x=2(1+\cos 2x)-1$$

$$\Leftrightarrow \sin 4x+\sqrt{3}\cos 4x=2\cos 2x \Leftrightarrow \cos\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)=\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x-\frac{\pi}{6}=2x+k2\pi \\ 4x-\frac{\pi}{6}=-2x+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{12}+k\pi \\ x=\frac{\pi}{36}+k\frac{\pi}{3} \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có 2 họ nghiệm.

Ví dụ 4.3. Giải phương trình: $\dfrac{2\cos 3x.\cos x+\sqrt{3}(1+\sin 2x)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)}=2\sqrt{3}$ **(4.3)**

Giải:

ĐKXĐ: $x\neq\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$. Khi đó:

$$\text{Pt}(4.3) \Leftrightarrow \cos 4x + \cos 2x + \sqrt{3} + \sqrt{3}\sin 2x = \sqrt{3}\left(1 + \sqrt{3}\cos\left(4x + \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 4x + \cos 4x = -(\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x)$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(4x + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \sin\left(4x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(-2x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x + \frac{\pi}{6} = -2x - \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 4x + \frac{\pi}{6} = \pi + 2x + \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có 2 họ nghiệm.

Ví dụ 4.4. Giải phương trình:

$$2\cos^2 2x - 2\cos 2x + 4\sin 6x + \cos 4x = 1 + 4\sqrt{3}\sin 3x\cos x \qquad \textbf{(4.4)}$$

Giải:

Ta có:

$$\text{Pt}(4.4) \Leftrightarrow 2\cos 4x - 2\cos 2x + 8\sin 3x\cos 3x = 4\sqrt{3}\sin 3x\cos x$$

$$\Leftrightarrow -4\sin 3x\sin x + 8\sin 3x\cos 3x = 4\sqrt{3}\sin 3x\cos x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 3x = 0 \\ 2\cos 3x = \sin x + \sqrt{3}\cos x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\frac{\pi}{3} \\ \cos 3x = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\frac{\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{2} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có 3 họ nghiệm.

❖ **Dạng 2:** Đưa về phương trình bậc 2 đối với một hàm số lượng giác

Ví dụ 4.5. Giải phương trình: $\sqrt{2}\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)=\sqrt{3}\cos 2x-\sin 2x$ **(4.5)**

Giải: Ta có:

$$\text{Pt}(4.5)\Leftrightarrow \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)+\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x=0$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=0\\ \sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{2\pi}{3}+k\pi\\ x=-\frac{\pi}{12}+k2\pi\\ x=\frac{17\pi}{12}+k2\pi\end{array}\right.\quad (k\in\mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có 3 họ nghiệm.

Nhận xét: Biểu thức dưới hàm số lượng giác là $2x$ sẽ nhóm với $\frac{\pi}{3}$, x sẽ gắn với $\frac{\pi}{6}$ hoặc $2x$ sẽ nhóm với $\frac{2\pi}{3}$, x sẽ gắn với $\frac{\pi}{3}$ để sử dụng công thức nhân đôi đưa về phương bậc 2 đối với một hàm số lượng giác.

Ví dụ 4.6. Giải phương trình: $\sqrt{3}(\sin 2x+\sin x)+\cos 2x-\cos x=2$ **(4.6)**

Giải:

Ta có:

$$\text{Pt}(4.6) \Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x + \sqrt{3}\sin x - \cos x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow -2\sin^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0 \\ \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có 3 họ nghiệm.

Ví dụ 4.7. Giải phương trình:

$$\cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x - 4\sqrt{3}\cos x - 4\sin x + 5 = 0 \qquad \textbf{(4.7)}$$

Giải:

Ta có:

$$\text{Pt}(4.7) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x - 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x\right) + \frac{5}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\cos\frac{2\pi}{3}\cos 2x + \sin\frac{2\pi}{3}\sin 2x - 4\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos x + \cos\frac{\pi}{3}\sin x\right) + \frac{5}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) + 4\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{5}{2} \Leftrightarrow -4\sin^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 8\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2} (\text{vn}) \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có 2 họ nghiệm.

Ví dụ 4.8. Giải phương trình: $3\cos x - \sin 2x = \sqrt{3}(\cos 2x + \sin x)$ **(4.8)**

Giải:

$$\text{Pt}(4.8) \Leftrightarrow \sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = 3\cos x - \sqrt{3}\sin x$$

$$\Leftrightarrow \sin(2x + \frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}\cos(x + \frac{\pi}{6})$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\left(2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \sqrt{3}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0 \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có 3 họ nghiệm.

Ví dụ 4.9. Giải phương trình: $(1 - \sin x)(5 + 2\sin x) = \sqrt{3}(\sin 2x - 3\cos x)$ **(4.9)**

Giải:

$$\text{Pt}(4.9) \Leftrightarrow 4 - 3\sin x + \cos 2x = \sqrt{3}\sin 2x - 3\sqrt{3}\cos x$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x + 3(\sqrt{3}\cos x - \sin x) + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 3\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 3\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -1 \\ \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có 3 họ nghiệm.

V. Thay thế hằng số bằng đẳng thức lượng giác

Trong nhiều bài toán nếu thay thế khéo léo các hằng số bằng các giá trị lượng giác hay biểu thức lượng giác sẽ cho cách giải ngắn gọn. Sau đây ta đi xét một vài ví dụ.

Ví dụ 5.1. Giải phương trình: $\dfrac{2\cos^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x + 1}{2\cos 2x} = \sqrt{3}\cos x - \sin x$ **(5.1)**

Giải :

Đk : $x \neq \dfrac{\pi}{4} + k.\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. Khi đó :

$$\text{Pt(5.1)} \Leftrightarrow \frac{3\cos^2 x - 2\sqrt{3}\cos x\sin x + \sin^2 x}{2\cos 2x} = \sqrt{3}\cos x - \sin x$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{3}\cos x - \sin x\right)^2 - 2\left(\sqrt{3}\cos x - \sin x\right)\cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{3}\cos x - \sin x = 0 \\ \sqrt{3}\cos x - \sin x = 2\cos 2x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = 0 \\ \cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = \cos 2x \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{18} + k\dfrac{2\pi}{3} \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có 3 họ nghiệm.

Ví dụ 5.2. Giải phương trình : $\dfrac{2(\cos^4 x - \sin^4 x) + 1}{2\cos(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3})} = \sqrt{3}\cos x + \sin x$ **(5.2)**

Giải:

Đk: $x \neq \dfrac{5\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. Khi đó

$$\text{Pt}(5.2) \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 2\sin^2 x + 1 = 2\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)\left(\sqrt{3}\cos x + \sin x\right)$$

$$\Leftrightarrow 3\cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)\left(\sqrt{3}\cos x + \sin x\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{3}\cos x + \sin x\right)\left(\sqrt{3}\cos x - \sin x\right) = 2\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)\left(\sqrt{3}\cos x + \sin x\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{3}\cos x + \sin x = 0 \\ \sqrt{3}\cos x - \sin x = 2\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0 \\ \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{2\pi}{3} + k\pi \\ x = -\pi + k4\pi \quad (k \in \mathbb{Z}). \\ x = \frac{\pi}{9} + k\frac{4\pi}{3} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có 3 họ nghiệm.

Ví dụ 5.3. Giải phương trình: $4\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right).\left[\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - 1\right] = 2\cos 2x - 1$ **(5.3)**

Giải :

$$\text{Pt}(5.3) \Leftrightarrow 4\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right).\left[\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - 1\right] = 2\cos 2x - 2\cos\frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right).\left[\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - 1\right] = -\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\left(2\sin^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=0 \\ \sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=0 \\ \sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\dfrac{\pi}{6}+k\pi \\ x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi \quad (k\in\mathbb{Z}). \\ x=\pi+k2\pi \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có 4 họ nghiệm.

C. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. $\sin 2x+2\cos 2x=1+\sin x-4\cos x$

2. $2\sin 2x-\cos 2x=7\sin x+2\cos x-4$

3. $9\sin x+6\cos x-3\sin 2x+\cos 2x=8$

4. $4(\sin^4 x+\cos^4 x)+\sqrt{3}\sin 4x=2$

5. $1+\sin^3 2x+\cos^3 2x=\dfrac{1}{2}\sin 4x$

6. $(\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x)^2-5=\cos(2x-\dfrac{\pi}{6})$

7. $1+\cot 2x=\dfrac{1-\cos 2x}{\sin^2 2x}$

8. $\cos^4 x+\sin^4(x+\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{1}{4}$

9. $2\sqrt{2}(\sin x+\cos x)\cos x=3+\cos 2x$

10. $\cos x+\sqrt{3}\sin x=\dfrac{3}{\cos x+\sqrt{3}\sin x+1}$

11. $5(\sin x+\dfrac{\cos 3x+\sin 3x}{1+2\sin 2x})=3+\cos 2x$

12. $2\sin 3x-\dfrac{1}{\sin x}=2\cos 3x+\dfrac{1}{\cos x}$

13. $\cos x\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{3x}{2}-\sin x\sin\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{3x}{2}=\dfrac{1}{2}$

14. $\sin\frac{5x}{2} = 5\cos^3 x\sin\frac{x}{2}$

15. $\tan^3(x - \frac{\pi}{4}) = \tan x - 1$

Hướng dẫn giải một số bài tập

1. $\sin 2x + 2\cos 2x = 1 + \sin x - 4\cos x$

$$\Leftrightarrow 2\sin x\cos x + 2(2\cos^2 x - 1) - 1 - \sin x + 4\cos x = 0$$
$$\Leftrightarrow \sin x(2\cos x - 1) + 4\cos^2 x + 4\cos x - 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow \sin x(2\cos x - 1) + (2\cos x - 1)(2\cos x + 3) = 0$$
$$\Leftrightarrow (2\cos x - 1)(2\sin x + 2\cos x + 3) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \frac{1}{2} \\ 2\sin x + 2\cos x = -3, (vn) \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi$$

2. $2\sin 2x - \cos 2x = 7\sin x + 2\cos x - 4$

$$\Leftrightarrow 4\sin x\cos x - (1 - 2\sin^2 x) - 7\sin x - 2\cos x + 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow 2\cos x(2\sin x - 1) + (2\sin^2 x - 7\sin x + 3) = 0$$
$$\Leftrightarrow 2\cos x(2\sin x - 1) + (2\sin x - 1)(\sin x - 3) = 0$$
$$\Leftrightarrow (2\sin x - 1)(2\cos x + \sin x - 3) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sin x - 1 = 0 \\ 2\cos x + \sin x = 3, (vn) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$$

3. $9\sin x + 6\cos x - 3\sin 2x + \cos 2x = 8$

$$\Leftrightarrow 6\sin x\cos x - 6\cos x + 2\sin^2 x - 9\sin x + 7 = 0$$
$$\Leftrightarrow 6\cos x(\sin x - 1) + (\sin x - 1)(2\sin x - 7) = 0$$
$$\Leftrightarrow (\sin x - 1)(6\cos x + 2\sin x - 7) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \\ 6\cos x + 2\sin x = 7 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$$

4. $4(\sin^4 x + \cos^4 x) + \sqrt{3}\sin 4x = 2$

$$\Leftrightarrow 4[(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x] + \sqrt{3}\sin 4x = 2$$
$$\Leftrightarrow 4(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x) + \sqrt{3}\sin 4x = 2 \Leftrightarrow \cos 4x + \sqrt{3}\sin 4x = -2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2} \\ x=-\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{2} \end{array}\right.$$

5. $1+\sin^3 2x+\cos^3 2x=\frac{1}{2}\sin 4x$

$\Leftrightarrow 2-\sin 4x+2(\sin 2x+\cos 2x)(1-\sin 2x\cos 2x)=0$

$\Leftrightarrow (2-\sin 4x)+(\sin 2x+\cos 2x)(2-\sin 4x)=0$

$\Leftrightarrow (2-\sin 4x)(\sin 2x+\cos 2x+1)=0 \Leftrightarrow \sin 2x+\cos 2x=-1$

$$\Leftrightarrow \sin(2x+\frac{\pi}{4})=-\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{4}+k\pi \\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi \end{array}\right.$$

7. Điều kiện: $\sin 2x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq k\frac{\pi}{2}$

$(*)\Leftrightarrow 1+\cot 2x=\frac{1-\cos 2x}{1-\cos^2 2x} \Leftrightarrow 1+\cot 2x=\frac{1}{1+\cos 2x}$

$\Leftrightarrow 1+\frac{\cos 2x}{\sin 2x}=\frac{1}{1+\cos 2x}$

$\Leftrightarrow \sin 2x(1+\cos 2x)+\cos 2x(1+\cos 2x)=\sin 2x$

$\Leftrightarrow \sin 2x\cos 2x+\cos 2x(1+\cos 2x)=0 \Leftrightarrow \cos 2x(\sin 2x+\cos 2x+1)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x=0 \\ \sin 2x+\cos 2x=-1 \end{array}\right.$$

$+\cos 2x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$

$$+\sin 2x+\cos 2x=-1 \Leftrightarrow \sin(2x+\frac{\pi}{4})=\sin(-\frac{\pi}{4}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{4}+k\pi \\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi \end{array}\right.$$

Vậy,phương trình có nghiệm: $x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$

8. $\cos^4 x+\sin^4(x+\frac{\pi}{4})=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{4}(1+\cos 2x)^2+\frac{1}{4}[1-\cos(2x+\frac{\pi}{2})]^2=\frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow (1+\cos 2x)^2+(1+\sin 2x)^2=1 \Leftrightarrow \sin 2x+\cos 2x=-1$

$$\Leftrightarrow \cos(2x-\frac{\pi}{4})=\cos\frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \\ x=-\frac{\pi}{4}+k\pi \end{array}\right.$$

11. Điều kiện: $\sin 2x \neq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\neq -\frac{\pi}{12}+k\pi \\ x\neq \frac{7\pi}{12}+k\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$

Ta có: $5(\sin x+\frac{\cos 3x+\sin 3x}{1+2\sin 2x})=5\frac{\sin x+2\sin 2x\sin x+\cos 3x+\sin 3x}{1+2\sin 2x}$

$$=5\frac{\sin x+\cos x-\cos 3x+\cos 3x+\sin 3x}{1+2\sin 2x}$$

$$=5\frac{(\sin 3x+\sin x)+\cos x}{1+2\sin 2x}=5\frac{2\sin 2x\cos x+\cos x}{1+2\sin 2x}$$

$$=5\frac{(2\sin x+1)\cos x}{1+2\sin 2x}=5\cos x$$

$(1)\Leftrightarrow 5\cos x=\cos 2x+3 \Leftrightarrow 2\cos^2 x-5\cos x+2=0$

$\Leftrightarrow \cos x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi$

12. Điều kiện: $\sin 2x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq k\frac{\pi}{2}$

$(*)\Leftrightarrow 2(\sin 3x-\cos 3x)=\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}$

$\Leftrightarrow 2[3(\sin x+\cos x)-4(\sin^3 x+\cos^3 x]=\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}$

$\Leftrightarrow 2(\sin x+\cos x)[3-4(\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x)]=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x\cos x}$

$\Leftrightarrow 2(\sin x+\cos x)(-1+4\sin x\cos x)-\frac{\sin x+\cos x}{\sin x\cos x}=0$

$\Leftrightarrow (\sin x+\cos x)(-2+8\sin x\cos x-\frac{1}{\sin x\cos x})=0$

$\Leftrightarrow (\sin x+\cos x)(4\sin 2x-\frac{2}{\sin 2x}-2)=0$

$\Leftrightarrow (\sin x+\cos x)(4\sin^2 2x-2\sin 2x-2)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x+\cos x=0 \\ 4\sin^2 2x-2\sin 2x-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x=-1 \\ \sin 2x=1 \\ \sin 2x=-1/2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\frac{\pi}{4}+k\pi \\ x=-\frac{\pi}{12}+k\pi \\ x=\frac{7\pi}{12}+k\pi \end{array}\right.$$

13. $\cos x\cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}-\sin x\sin\frac{x}{2}\sin\frac{3x}{2}=\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos x(\cos 2x+\cos x)+\frac{1}{2}\sin x(\cos 2x-\cos x)=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos x\cos 2x+\cos^2 x+\sin x\cos 2x-\sin x\cos x=1$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x(\sin x+\cos x)+1-\sin^2 x-\sin x\cos x-1=0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x(\sin x+\cos x)-\sin x(\sin x+\cos x)=0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x+\cos x)(\cos 2x-\sin x)=0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x+\cos x)(-2\sin^2 x-\sin x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x+\cos x=0 \\ 2\sin^2 x+\sin x-1=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x=-1 \\ \sin x=-1 \\ \sin x=1/2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{4}+k\pi \\ x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi \\ x=\frac{\pi}{6}+k2\pi \vee x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right.$$

14. Ta thấy: $\cos\frac{x}{2}=0 \Leftrightarrow x=\pi+k2\pi \Leftrightarrow \cos x=-1$

Thay vào phương trình (*) ta được:

$\sin(\frac{5\pi}{2}+5k\pi)=-\sin(\frac{\pi}{2}+k\pi)$ không thỏa mãn với mọi k

Do đó $\cos\frac{x}{2}$ không là nghiệm của phương trình nên:

$$(*) \Leftrightarrow \sin\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2}=5\cos^3 x\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sin 3x+\sin 2x)=\frac{5}{2}\cos^3 x\sin x$$

$$\Leftrightarrow 3\sin x-4\sin^3 x+2\sin x\cos x-5\cos^3 x\sin x=0$$

$$\Leftrightarrow \sin x(3-4\sin^2 x+2\cos x-5\cos^3 x)=0$$

$$\Leftrightarrow \sin x(5\cos^3 x-4\cos^2 x-2\cos x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \cos x=1\\ \cos x=\dfrac{-1+\sqrt{21}}{10}\\ \cos x=\dfrac{-1-\sqrt{21}}{10}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=k2\pi\\ x=\pm\arccos\dfrac{-1+\sqrt{21}}{10}+k2\pi\\ x=\pm\arccos\dfrac{-1-\sqrt{21}}{10}+k2\pi\end{array}\right.$$

Vậy,phương trình có nghiệm: $x=k2\pi$, $x=\pm\arccos\dfrac{-1+\sqrt{21}}{10}+k2\pi$

$$x=\pm\arccos\frac{-1-\sqrt{21}}{10}+k2\pi$$

15. Điều kiện: $\begin{cases}\sin(\frac{\pi}{4}-x)\cos(\frac{\pi}{4}-x)\neq 0\\ \sin(\frac{\pi}{4}+x)\cos(\frac{\pi}{4}+x)\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin(\frac{\pi}{4}-2x)\neq 0\\ \sin(\frac{\pi}{4}+2x)\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \cos 2x\neq 0$

$$\tan(\frac{\pi}{4}-x)\tan(\frac{\pi}{4}+x)=\frac{1-\tan x}{1+\tan x}.\frac{1+\tan x}{1-\tan x}=1$$

$$(1)\Leftrightarrow \sin^4 2x+\cos^4 2x=\cos^4 4x \Leftrightarrow 1-2\sin^2 2x\cos^2 2x=\cos^4 4x$$

$$\Leftrightarrow 1-\frac{1}{2}\sin^2 4x=\cos^4 4x \Leftrightarrow 1-\frac{1}{2}(1-\cos^2 4x)=\cos^4 4x$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^4 4x-\cos^2 4x-1=0 \Leftrightarrow \cos^2 4x=1$$

$$\Leftrightarrow 1-\cos^2 4x=0 \Leftrightarrow \sin 4x=0 \Leftrightarrow x=k\frac{\pi}{4}$$

Vậy,phương trình có nghiệm: $x=k\dfrac{\pi}{2}$